

Statistika, 2013
@Jurusan Matematika Unhas

“Peta Kendali *Multivariate Exponentially Weighted Moving Average* (MEWMA)”

Zuhrawati Latif

Mahasiswa Jurusan Matematika Universitas Hasanuddin

ABSTRAK

Proses produksi merupakan serangkaian kegiatan dalam mengolah bahan baku menjadi suatu produk yang memiliki nilai tambah, akan sangat mempengaruhi kualitas dari produk yang dihasilkan. Kualitas suatu produk merupakan hal penting yang diperhatikan dalam menghadapi persaingan bisnis dunia industri. Untuk mempertahankan kualitas dari produk maka dilakukan pengontrolan proses produksi dalam memenuhi standar kualitas yang dapat diterima konsumen.

*Dari sudut pandang Statistical Proses Control (SPC) , sebuah proses yang berkualitas adalah proses yang menjaga agar mean proses tersebut tidak jauh berbeda dengan target dan berpola acak murni atau random. Salah satu peta kendali multivariat yang cukup efektif untuk mengontrol kualitas dengan pengamatan yang bersifat individual adalah peta kendali *Multivariate Exponentially Weighted Moving Average (MEWMA)*. Pada penelitian ini pengontrolan kualitas dilakukan pengamatan pada nilai portofolio dari beberapa perusahaan telekomunikasi besardi Indonesia untuk tahun 2010. Dengan menggunakan pembobot yang telah ditentukan, nilai poortofolio menunjukkan masih adanya hasil yang belum terkendali secara statistik.*

1. Pendahuluan

Dewasa ini dengan adanya prinsip pasar bebas, investasi dalam bentuk kepemilikan aset finansial mulai diminati oleh masyarakat di Indonesia. Salah satu aset finansial yang paling populer adalah *stocks* atau saham potofolio. Portofolio merupakan surat berharga sebagai bukti tanda penyertaan atau kepemilikan seseorang atau badan hukum dalam suatu perusahaan, khususnya perusahaan publik yang memperdagangkan potofolionya. Para investor tentunya akan lebih selektif dalam memilih portofolio perusahaan mana yang akan menjadi tempat investasi. Sehingga perusahaan tentunya harus menjaga mutu agar portofolionya bernilai tinggi dan diminati oleh para investor.

Dalam ilmu statistika, dikenal adanya sistem pengendalian mutu. Pengendalian mutu bertujuan untuk menyediakan suatu alat baru yang membuat pemeriksaan proses menjadi lebih efektif, Grant & Richard (1993). Dan untuk mendapatkan gambaran bahwa spesifikasi produk yang telah ditetapkan apakah masih sesuai dengan mutu standar atau perlu pengecekan terhadap kesalahan-kesalahan yang terjadi, sehingga dapat menurunkan mutu produk tersebut. (web1).

Salah satu teknik yang digunakan dalam pengendalian mutu statistik yaitu peta kendali, diantaranya peta kendali *Exponentially Weighted Moving Average* (EWMA). Pertama kali peta kendali EWMA diperkenalkan oleh Roberts(1959), sudah banyak dilakukan perluasan dan variasi dari konsep dasar peta kendali EWMA yang diusulkan. Crowder, mengusulkan sebuah metode yang sederhana untuk mempelajari panjang distribusi peta kendali *Exponentially Weighted Moving Average* (EWMA). Dia juga mengusulkan sebuah design optimal dari

peta kendali EWMA yang berbasis pada peta kendali ARL. Luccas dan Saccuci (1987) mengusulkan penggunaan ciri-ciri skema peta kendali EWMA yang lebih peka untuk menyelesaikan masalah.

Pada tugas akhir ini akan dikaji tentang peta kendali *Multivariate Exponentially Weighted Moving Average* dan aplikasi pada data.

2. Statistika Pengendalian Proses (SPP)

Statistika Pengendalian Proses (SPP) berdasarkan jumlah variabelnya dibedakan menjadi dua macam, yaitu univariate statistical proses control (statistika pengendalian univariate), dimana hanya ada satu variabel yang berpengaruh terhadap proses, dan multivariate statistical process control (statistika pengendali proses multivariat) yang melibatkan lebih dari satu variabel yang memiliki pengaruh terhadap proses.

Perbedaan jumlah variabel tentu memiliki pengaruh terhadap perhitungan statistika yang harus dijalankan, dimana SPP univariate lebih mudah dilakukan karena hanya melibatkan satu variabel, tetap pada kenyataannya, pada dunia industri jumlah variabel yang berpengaruh terhadap suatu proses produksi terhadap lebih dari satu variabel. Karena itulah SPP multivariate lebih banyak digunakan. Pengontrolan proses dimana beberapa variabel berhubungan secara kolektif dikenal dengan *Multivariate Statistical Process Control (MSPC)*, Bersimis dkk (2009). Seperti halnya SPC, dalam MSPC terdapat bagan kendali yang digunakan untuk memonitor proses produksi apakah dalam keadaan stabil atau tidak. Pengendalian kualitas multivariat dalam proses produksi tidak hanya

difokuskan untuk pengontrolan rata-rata, akan tetapi pengontrolan terhadap variabilitas proses juga sama pentingnya dengan pengontrolan rata-rata proses.

3. Peta Kendali *Exponentially Weighted Moving Average* (EWMA)

Khoo (2004), menjelaskan Peta kendali EWMA didefinisikan sebagai

$$Z_i = \beta X_i + (1 - \beta)Z_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.1)$$

dimana $0 < \beta \leq 1$ perubahan konstan dan nilai awal dari sebuah proses target nilai, dengan kata lain $Z_0 = \mu_0$. Disini diasumsikan bahwa X_i , $i = 1, 2, \dots, n$ adalah independent dan identik. Observasi $N(\mu_0, \sigma^2)$, dimana μ_0 dan σ^2 mewakili proses mean dan variansi dari X_i berturut-turut. Jika μ_0 tidak diketahui, rata-rata dari kendali set data awal digunakan sebagai nilai awal dari EWMA, jadi $Z_0 = \bar{X}$. Peta kendali EWMA digambarkan dengan plot Z_i dengan nomor sampel i . Garis tengah dan batas kontrol untuk peta kendali EWMA adalah sebagai berikut :

$$UCL = \mu_0 + L_\sigma \sqrt{\frac{\beta}{2-\beta} [1 - (1 - \beta)^{2i}]} \quad (2.2)$$

$$\text{Center Line} = \mu_0 \quad (2.3)$$

$$LCL = \mu_0 - L_\sigma \sqrt{\frac{\beta}{2-\beta} [1 - (1 - \beta)^{2i}]} \quad (2.4)$$

Setelah diagram EWMA dijalankan untuk beberapa periode waktu, batasnya akan mendekati bagian nilai tetap, berikut contoh yang diberikan oleh Montgomery :

$$UCL = \mu_0 + L_\sigma \sqrt{\frac{\beta}{2-\beta}} \quad (5)$$

$$Center Line = \mu_0 \quad (6)$$

$$LCL = \mu_0 - L_\sigma \sqrt{\frac{\beta}{2-\beta}} \quad (7)$$

Nilai terkecil dari β digunakan sebagai pendeteksi cepat dari perubahan yang kecil saat nilai terbesar dari β lebih baik untuk perubahan besar.

4. Peta Kendali *Multivariate* EWMA (MEWMA)

Khoo (2004), menjelaskan bahwa di dalam data multivariate, perluasan awal untuk menjelaskan vektor dari EWMA's.

$$Z_i = R X_i + (1 - R) Z_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.8)$$

Dimana $Z_0 = 0$, dan $R = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_p)$, $0 < r_j \leq 1$ dengan diagonal matriks r_1, r_2, \dots, r_p , $j = 1, 2, \dots, p$, dimana p adalah nomor variabel Persamaan ini diasumsikan sebagai observation multivariate X_i , vektor $i = 1, 2, \dots, n$, yang berdistribusi $N_p(\mu_0, \Sigma)$, dimana μ_0 adalah target on dari vector mean dan Σ adalah matriks covariance. Peta kendali MEWMA yang memberikan signal diluar kontrol digambarkan :

$$T_i^2 = Z_i' \Sigma_{Z_i}^{-1} Z_i > h \quad (2.9)$$

Dimana $h (>0)$ dipilih untuk mencapai sebuah spesifikasi in control ARL dan Σ_{Z_i} adalah matriks covarianc dari Z_i . Lowry, Woodall, Champ dan Rigdon

menunjukkan dengan, jika $r_1 = r_2 = \dots = r_p = r$, maka vektor MEWMA dapat dituliskan sebagai :

$$Z_i = rX_i + (1 - r)Z_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (2.10)$$

Dimana

$$\Sigma_{Z_i} = \{[1 - (1 - r)^{2i}]/(2 - r)\}\Sigma \quad (2.11)$$

Khoo (2004) mengatakan χ_p^2 dengan α menyatakan tingkat keberhasilan dan p adalah jumlah variable yang terlibat.

5. Metodologi Penelitian

Jenis data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder berupa data portofolio dari beberapa perusahaan provider telekomunikasi di Indonesia, yaitu Telkomsel, XL, Indosat dan Fren selama bulan Januari 2010.

6. Penerapan Peta Kendali *Multivariate EWMA* pada data Portofolio

Pada subbab ini, akan ditunjukkan bagaimana penerapan peta kendali *Multivariate EWMA* pada data portofolio. Data yang digunakan adalah data portofolio dari tiga perusahaan provider telekomunikasi di Indonesia yaitu PT. Telkomsel, PT XL Axiata Tbk, PT Indosat dan PT Fren pada tahun 2010.

Datanya adalah sebagai berikut :

Tabel 6.1. Data tahun 2010, dengan variable PT. Telkomsel (X_1), PT XL Axiata Tbk (X_2), PT Indosat (X_3) dan PT Fren (X_4).

| Bulan | X_1 | X_2 | X_3 | X_4 |
|-------|----------|----------|----------|----------|
| 1 | 7,950.00 | 5,300.00 | 5,400.00 | 87.00 |
| 2 | 7,950.00 | 5,600.00 | 5,400.00 | 96.00 |
| 3 | 9,100.00 | 5,750.00 | 6,000.00 | 103.00 |
| 4 | 9,200.00 | 5,400.00 | 5,500.00 | 92.00 |
| 5 | 8,650.00 | 5,000.00 | 4,400.00 | 84.00 |
| 6 | 8,450.00 | 4,750.00 | 4,850.00 | 95.00 |
| 7 | 7,700.00 | 4,075.00 | 4,950.00 | 92.00 |
| 8 | 7,750.00 | 3,475.00 | 5,150.00 | 96.00 |
| 9 | 7,850.00 | 3,725.00 | 5,900.00 | 119.00 |
| 10 | 8,050.00 | 3,500.00 | 5,500.00 | 66.00 |
| 11 | 8,300.00 | 3,050.00 | 5,100.00 | 90.00 |
| 12 | 9,350.00 | 2,200.00 | 5,600.00 | 1,000.00 |

6.1. Peta Kendali *Multivariate* EWMA

$$Z_i = RX_i + (1 - R)Z_{i-1} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Tabel 6.4. Nilai MEWMA untuk data tahun 2010

Sambungan **Tabel 6.4.** Nilai MEWMA untuk data tahun 2010

| Bulan | X_1 | X_2 | X_3 | X_4 |
|-------|----------|----------|----------|--------|
| 1 | 7,950.00 | 5,300.00 | 5,400.00 | 87.00 |
| 2 | 7,950.00 | 5,600.00 | 5,400.00 | 96.00 |
| 3 | 9,100.00 | 5,750.00 | 6,000.00 | 103.00 |

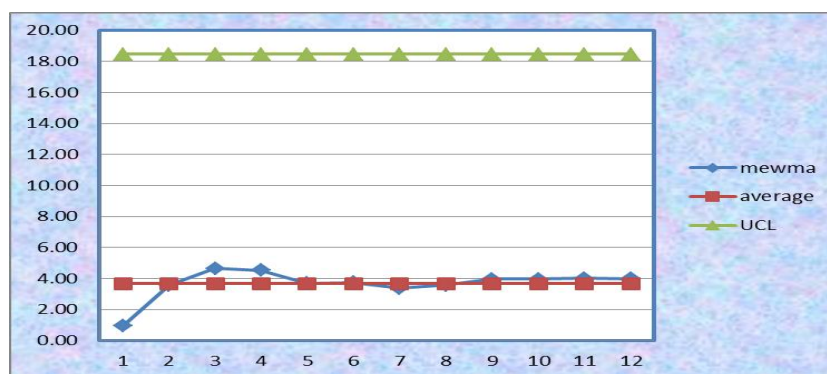
| | | | | |
|----|----------|----------|----------|----------|
| 4 | 9,200.00 | 5,400.00 | 5,500.00 | 92.00 |
| 5 | 8,650.00 | 5,000.00 | 4,400.00 | 84.00 |
| 6 | 8,450.00 | 4,750.00 | 4,850.00 | 95.00 |
| 7 | 7,700.00 | 4,075.00 | 4,950.00 | 92.00 |
| 8 | 7,750.00 | 3,475.00 | 5,150.00 | 96.00 |
| 9 | 7,850.00 | 3,725.00 | 5,900.00 | 119.00 |
| 10 | 8,050.00 | 3,500.00 | 5,500.00 | 66.00 |
| 11 | 8,300.00 | 3,050.00 | 5,100.00 | 90.00 |
| 12 | 9,350.00 | 2,200.00 | 5,600.00 | 1,000.00 |

Menurut Tracy, Young dan Mason, $T_i^2 \sim \chi_p^2$

Jadi, untuk $p = 4$ dan $\alpha = 0,05$ batas kontrol atas adalah

$$UCL = \chi_{(4;0.001)}^2 = 18.465$$

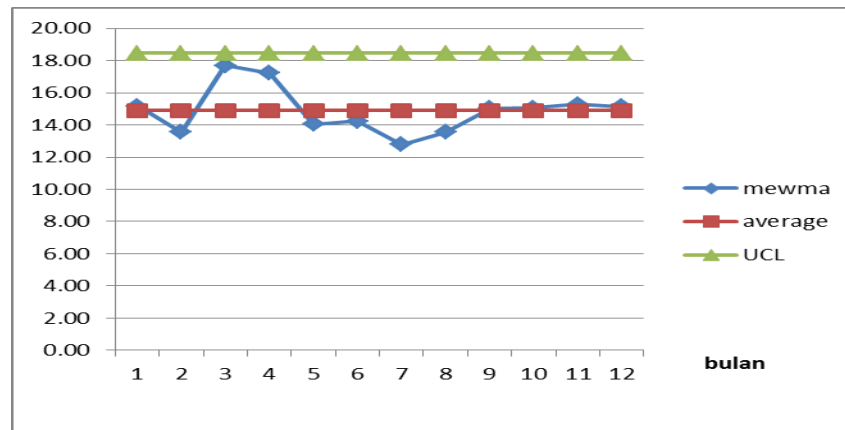
sehingga bagan kendalinya adalah sebagai berikut



Gambar 4.1. Peta kendali **MEWMA** untuk data PT. Telkomsel (X_1), PT XL Axiata Tbk

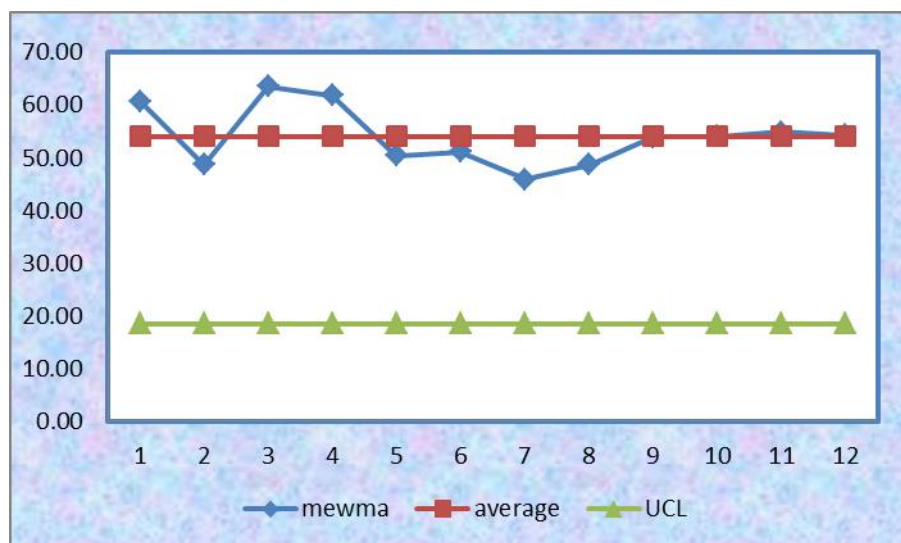
(X_2), PT Indosat (X_3), dan PT Fren (X_4), pada tahun 2010 untuk $r = 0.05$

Dari grafik diatas terlihat bahwa data berada dalam batas pengontrolan.



Gambar 4.2. Peta kendali *MEWMA* untuk data PT. Telkomsel (X_1), PT XL Axiata Tbk (X_2), PT Indosat (X_3), dan PT Fren (X_4), pada tahun 2010 untuk $r = 0.1$

Dari grafik diatas terlihat bahwa data berada di dalam batas pengontrolan



Gambar 4.3. Peta kendali *MEWMA* untuk data PT. Telkomsel (X_1), PT XL Axiata Tbk (X_2), PT Indosat (X_3), dan PT Fren (X_4), pada tahun 2010 untuk $r = 0.2$

Pada gambar 4.3 diatas jumlah observasi berada di luar batas kendali. Dengan demikian dengan $r = 0.2$, membuat observasi berada di luar batas kendali.

7. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah diperoleh pada bab IV, maka dapat ditarik kesimpulan bahwa bentuk perluasan peta kendali *Multivariate Exponentially Weighted Moving Averaga (MEWMA)* dituliskan dalam bentuk vector :

$$Z_i = RX_i + (1 - R)Z_{i-1} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Peta kendali Multivariate EWMA yang memberikan signal diluar control digambarkan :

$$T_i^2 = Z_i' \Sigma_{Z_i}^{-1} Z_i > h$$

Dengan $UCL = \chi_{(p; \alpha)}^2$

Hasil analisis penerepan terhadap data portofolio dari empat perusahaan provider telekomunikasi yaitu PT.Telkomsel, PT. XL Axiata Tbk, PT Indosat dan PT Fren tahun 2010, dengan mengambil nilai r , dimana $0 < r_j \leq 1$, dengan menggunakan $\alpha = 0,001$ diperoleh $UCL = 18.47$.

Daftar Pustaka

- Bersimis, S., Panaretos, J., dan Psarakis, S., 2009, *Multivariate Statistical Process Control Charts and The Problem of Interpretation: A Short Overview and Some Applications in Industry*.eprint arXiv:0901.2880.
- Khoo, Michael B.,C., 2004, *An Extention for the Univariate Exponentially Weighted Moving Average Control Chart*, Malaysiya.
- Lucas J.M. & M.S. Saccucci., 1987, *Exponentially Weighted Moving Average Control Schemes: Properties and Enhancements*, Technometrics.

Mason, R., L., dan Young, J., C., 2002, *Multivariate Statistic Process Control with Industrial Applications*, ASA-SIAM series on statistics and applied probability, Philadelphia.

Montgomery, D., C., 2001, *Introduction to Statistical Quality Control*, John Wiley and Sons, Inc., New York.

Pahlevi, Rizal. 2008. "Portofolio Sebagai Alternatif Keputusan investasi Di pasar modal" Malang.

Roberts, S.W., 1959, *Control Chart Tests based on Geometric Moving Averages*, Technometrics,

Web 3 : *Multivariate EWMA Charts*

<http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/pmc/section3/pmc343.htm>

(diunduh tanggal 13 Agustus 2013; jam 16.15 WITA)

Web 4 : *The Algorithm and Design for Real-Time Hotelling's T2 and MEWMA Control Chart in MSPC*

<http://interstat.statjournals.net/YEAR/2004/articles/0407001.pdf>

(diunduh tanggal 13 Agustus 2013; jam 16.15 WITA)

<http://finance.yahoo.com> diunduh tanggal 2 Agustus 2013 pukul 16.30